VẤN ĐỀ 3: CHUYÊN ĐỀ TỈ SỐ THỂ TÍCH VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ THỂ TÍCH

A. CÁC CÔNG THỨC GIẢI NHANH TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

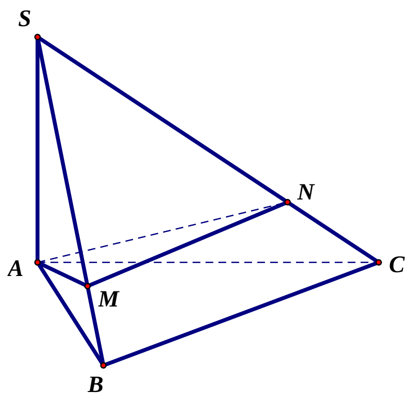
1. Tỉ số thể tích khối chóp tam giác

Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Khi đó ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} .$$

Ví dụ 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB và SC. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{A.BCNM}}{V_{S.ABC}}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SM.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4}{5}$.

Tương tự $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{5}$.

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_{A.BCNM}}{V_{S.ABC}} = \frac{9}{25}$$

2. Tỉ số thể tích khối chóp có đáy là hình bình hành

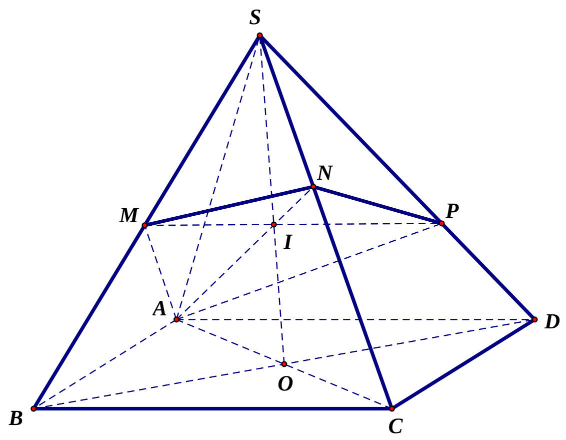
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD, SO lần lượt tại A', B', C', D' và O'. Ta có

a) $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = 2.\dfrac{SO}{SO'}$.

b) Đặt $x = \dfrac{SA}{SA'}$, $y = \dfrac{SB}{SB'}$, $z = \dfrac{SC}{SC'}$, $t = \dfrac{SD}{SD'}$. Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{x+y+z+t}{4xyzt}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, điểm P thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2PD$. Mặt phẳng (AMP) cắt SC tại N. Tính tỷ số $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}$.

Lời giải

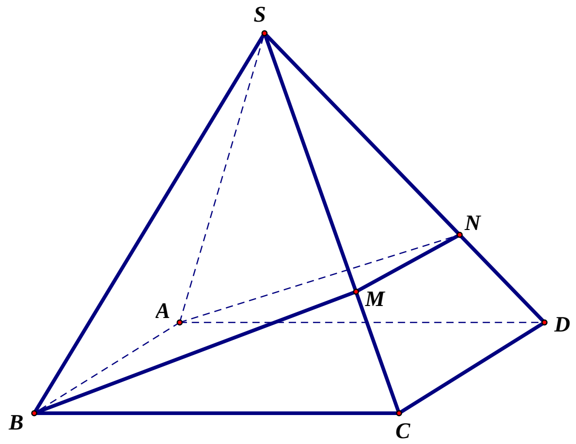


Ta có $\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SP}\Leftrightarrow 1+\frac{SC}{SN}=2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{SC}{SN}=\frac{5}{2}$

Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1+2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{4.1.2.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{7}{30}$

Ví dụ 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và đi qua điểm M trên SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỷ số $k=\frac{SM}{SC}$.

Lời giải



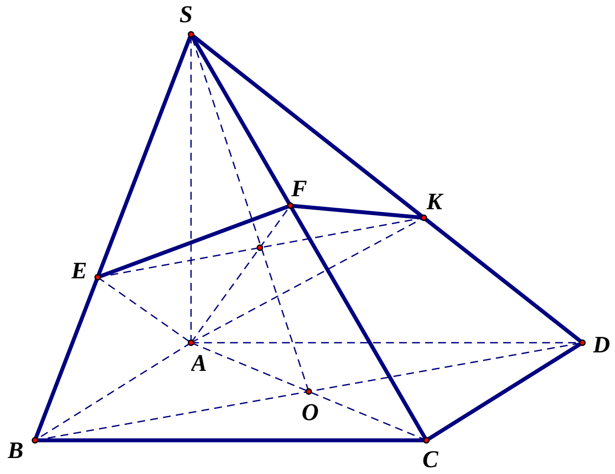
Gọi $N=(P)\cap SC$ ta có $\begin{cases}AB\subset(P)\\AB//CD\end{cases}$ nên $MN//CD$.

Ta có $k=\frac{SM}{SC}\Rightarrow\frac{SC}{SM}=\frac{SD}{SN}=\frac{1}{k}$

Khi đó $\frac{V_{SABMN}}{V_{SABCD}}=\frac{1+1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}}{4.\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}-1=0\Leftrightarrow\frac{1}{k}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V, đáy $ABCD$ là hình vuông; $SA\perp(ABCD)$ và SC hợp với đáy một góc bằng $30°$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC, cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại E,F,K. Tính thể tích khối chóp $S.AEFK$.

Lời giải



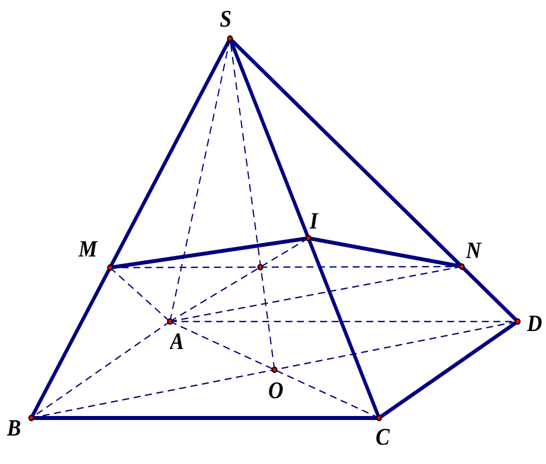
Ta có $\frac{SB}{SE}=\frac{SB^2}{SA^2}$. Tương tự $\frac{SD}{SK}=\frac{SD^2}{SA^2}$ nên $\frac{SB}{SE}=\frac{SD}{SK}$.

Mà $\frac{SC}{SF}=\frac{SC^2}{SA^2}=4$ (do ΔSCA vuông tại A, $SCA=30^0$) nên $\frac{SC}{SF}+1=\frac{SB}{SE}+\frac{SD}{SK}=5\Rightarrow\frac{SB}{SE}=\frac{SD}{SK}=\frac{5}{2}$

$\frac{V_{S.AEFK}}{V_{S.ABCD}}=\frac{10}{4.1.4.\frac{5}{2}.\frac{5}{2}}=\frac{1}{10}\Rightarrow V_{S.AEFK}=\frac{V_{S.ABCD}}{10}=\frac{V}{10}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành; điểm I nằm trên SC sao cho $IS=2IC$. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AI cắt cạnh SB,SD lần lượt tại M,N. Gọi V',V lần lượt là thể tích khối chóp $S.AMIN$ và $S.ABCD$. Tính giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích $\frac{V'}{V}$.

Lời giải

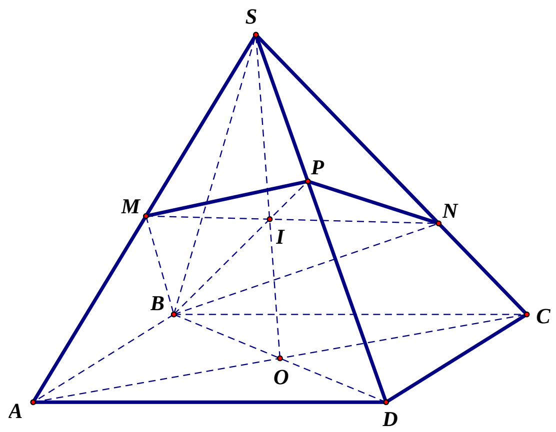


Đặt $\frac{SB}{SM}=x,\frac{SD}{SN}=y\Rightarrow x,y\ge 1$. Ta có $\Rightarrow x+y=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow x+y=\frac{5}{2}$.

Ta có $\frac{V'}{V}=\frac{x+y+1+\frac{3}{2}}{4x.y.1.\frac{3}{2}}=\frac{5}{6xy}\ge\frac{5}{6\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=\frac{8}{15}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{5}{4}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua B, trung điểm I của SO và cắt các cạnh SA,SC và SD lần lượt tại M,N và P. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$.

Lời giải



Đặt $\frac{SA}{SM}=x,\frac{SC}{SN}=y\Rightarrow x,y\ge 1$.Ta có $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SB}+\frac{SD}{SP}=2.\frac{SO}{SI}=4$

Nên $\frac{SD}{SP}=3;\ x+y=4$. Từ đó $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{8}{4.x.y.3.1}=\frac{2}{3xy}=\frac{2}{3x\left(4-x\right)}$

Từ $x+y=4\Leftrightarrow x=4-y\le 3$ vì $y\ge 1$.

Xét $f\left(x\right)=\frac{2}{3x\left(4-x\right)},1\le x\le 3$ $f'\left(x\right)=\frac{2\left(4-2x\right)}{\left[3x\left(4-x\right)\right]^2}=0\Leftrightarrow x=2$

Ta có $f\left(1\right)=f\left(3\right)=\frac{2}{9};f\left(2\right)=\frac{1}{6}$.

Vậy $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ đạt GTNN, GTLN lần lượt là $\frac{1}{6},\frac{2}{9}$.

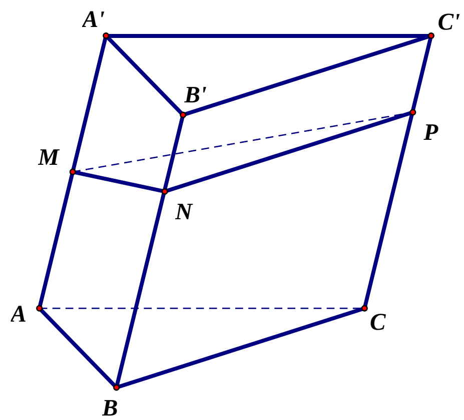
3. Tỉ số thể tích khối lăng trụ tam giác

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh AA',BB',CC' sao cho $\frac{A'M}{AA'}=x,\frac{B'N}{BB'}=y,\frac{C'P}{CC'}=z$. Khi đó $\frac{V_{A'B'C'MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\frac{x+y+z}{3}$.

Đặc biệt: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}}=\frac{x}{3}$, $\frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}}=\frac{y+z}{3}$.

Ví dụ 7. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có M,N,P lần lượt thuộc các cạnh AA',BB',CC' sao cho $AM=MA',BN=3NB',CP=3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP$, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải

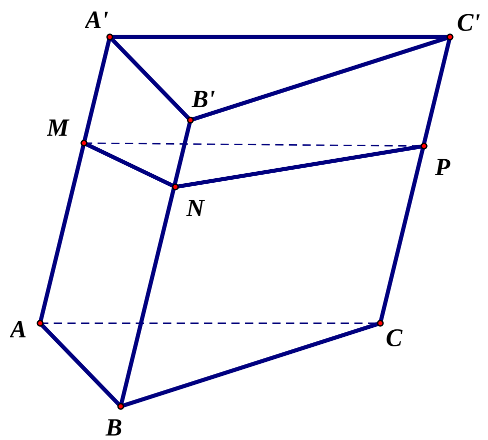


Ta có $MA = MA' \Rightarrow \dfrac{MA}{AA'} = \dfrac{1}{2}; BN = 3NB' \Rightarrow \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{3}{4}; CP = 3PC' \Rightarrow \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{3}{4}$

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \dfrac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = 2.$

Ví dụ 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V, các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', BN = 3NB', CP = x.PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$, tính giá trị của x để $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải

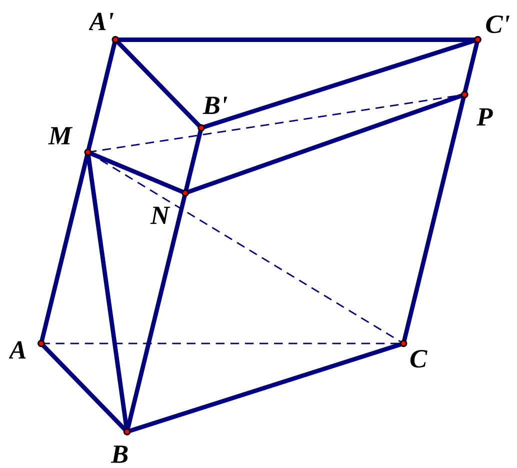


Ta có $MA = 2MA' \Rightarrow \dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{2}{3}; BN = 3NB' \Rightarrow \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{3}{4};\ CP = xPC' \Rightarrow \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{x}{x+1}$

Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{x}{x+1}}{3} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{17}{12} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{9}{5} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{23}{60} \Leftrightarrow x = \dfrac{23}{37}.$

Ví dụ 9. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $60\,\text{cm}^3$, các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', BN = 3NB', CP = 4PC'$. Thể tích của khối đa diện $BC.MNP$.

Lời giải



Ta có $MA = 2MA' \Rightarrow \dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{2}{3}; BN = 3NB' \Rightarrow \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{3}{4}; CP = 4PC' \Rightarrow \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{4}{5}$

Nên $\dfrac{V_{ABCMNP}}{V_{ABCA'B'C'}} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}{3} = \dfrac{133}{180} \Rightarrow V_{ABCMNP} = \dfrac{133}{180}.60 = \dfrac{133}{3}$

Mà $V_{M.ABC}=\frac{1}{3}d\left(M;(ABC)\right).S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}d\left(A';(ABC)\right).S_{ABC}=\frac{2}{9}.V_{ABC.A'B'C'}=\frac{40}{3}$.

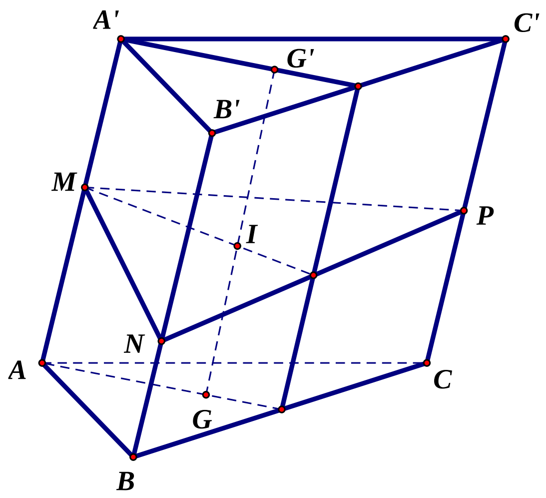
Vậy $V_{BCMNP}=\frac{133}{3}-\frac{40}{3}=31\left(cm^3\right)$.

Nhận xét. Các bài toán dạng này sẽ xuất hiện nhiều khối không phải là các khối có công thức tính thể tích như chóp hay lăng trụ. Thay vì việc phải phân chia các khối này thành các khối có công thức tính, nay ta có ngay một kết quả rất nhanh và chính xác.

Ví dụ 10. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có G,G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Mặt phẳng (α) cắt AA',BB',CC',GG' lần lượt tại M,N,P,I.

Chứng minh $\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}=3.\frac{GI}{GG'}$.

Chứng minh



Đặt $x=\frac{AM}{AA'},y=\frac{BN}{BB'},z=\frac{CP}{CC'},t=\frac{GI}{GG'}$; $V_{ABC.A'B'C'}=V$

Dễ thấy $V_{AGB.A'G'B'}=V_{CGB.C'G'B'}=V_{AGC.A'G'C'}=\frac{V}{3}$.

Ta có $\frac{V_{AGBMIN}}{V_{V_{AGB.A'G'B'}}}=\frac{x+y+t}{3}$. Tương tự ta có $\frac{V_{CGBPIN}}{V_{V_{CGB.C'G'B'}}}=\frac{z+y+t}{3}$; $\frac{V_{CGAPIN}}{V_{V_{CGA.C'G'A'}}}=\frac{z+y+t}{3}$

Cộng vế với vế cả 3 đẳng thức trên ta được $\frac{3V_{ABCMNBP}}{V}=\frac{x+y+t}{3}+\frac{z+y+t}{3}+\frac{z+y+t}{3}=\frac{2(x+y+z)}{3}+t$

Mà $\frac{3V_{ABCMNBP}}{V}=3.\frac{x+y+z}{3}=x+y+z$ nên $t=\frac{x+y+z}{3}$. Ta được điều phải chứng minh.

Từ kết quả trên ta có $\frac{V_{ABCMNBP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{GI}{GG'}$.

Nhận xét. Dựa vào kết quả trên ta thấy rằng chỉ cần biết (α) cắt GG' tại vị trí điểm I xác định là ta đã biết (α) chia lăng trụ thành hai phần với tỉ số bao nhiêu rồi.

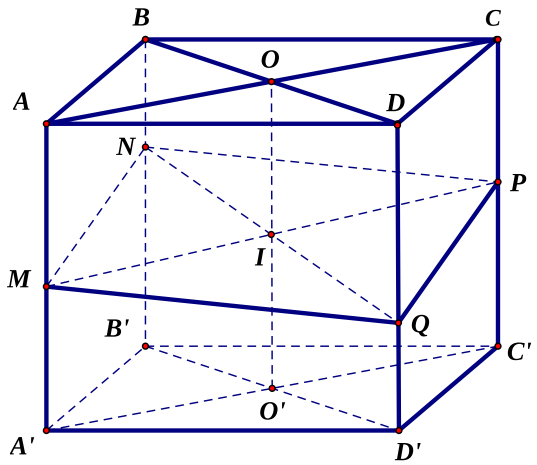
4. Tỉ số thể tích khối hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA',BB',CC',DD' lần lượt tại M,N,P,Q sao cho $\frac{AM}{AA'}=x,\frac{BN}{BB'}=y,\frac{CP}{CC'}=z,\frac{DQ}{DD'}=t$. Khi đó ta có

a) $x+z=y+t$.

b) $\dfrac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{x+z}{2}=\dfrac{y+t}{2}$.

Chứng minh



a. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Gọi I, O lần lượt là tâm của hình bình hành $MNPQ$ và hình vuông $ABCD$. Ta có OI là đường trung bình của hình thang $AMPC$ nên $OI=\dfrac{AM+CP}{2}$.

Tương tự $OI=\dfrac{BN+DQ}{2}$, do đó $AM+CP=BN+DQ \Leftrightarrow xAA'+zCC'=yBB'+tDD' \Leftrightarrow x+z=y+t$

b. Áp dụng **Tính chất 3** ta có

$$\frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABD.A'B'D'}}=\frac{x+y+t}{3}\Leftrightarrow\frac{2V_{ABDMNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{x+y+t}{3}\Leftrightarrow\frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{x+y+t}{6}$$

tương tự $\dfrac{V_{BCDNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{y+z+t}{6}$

Do đó,

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}+\frac{V_{BCDNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{x+y+t}{6}+\frac{y+z+t}{6}=\frac{x+y+z+t+y+t}{6}$$

$$=\frac{x+y+z+t+\dfrac{x+y+z+t}{2}}{6}=\frac{x+y+z+t}{4}$$

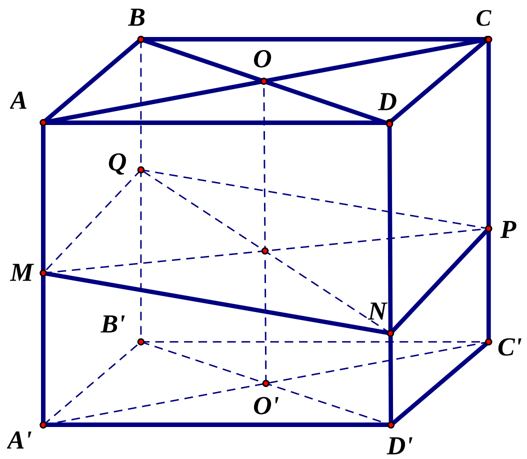
Chú ý: $\dfrac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{OI}{OO'}$.

Nhận xét. Một kết quả tương tự như **Tính chất 3.** Ở lăng trụ là tổng ba tỉ số chia ba, còn hình hộp là chia bốn.

Và cũng chỉ cần biết (α) cắt đoạn thẳng nối hai tâm đáy ở đâu là ta đã tìm được tỷ số hai khối tạo thành do (α) cắt hình hộp. Tuy nhiên, **Tính chất 4** cũng khẳng định chỉ cần biết hai tỉ số ở hai cạnh bên đối diện của hình hộp mà (α) cắt là ta cũng tìm được tỉ số thể tích các khối.

Ví dụ 11. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$; $DN=3ND'$ và $CP=2C'P$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện nhỏ hơn.

Lời giải



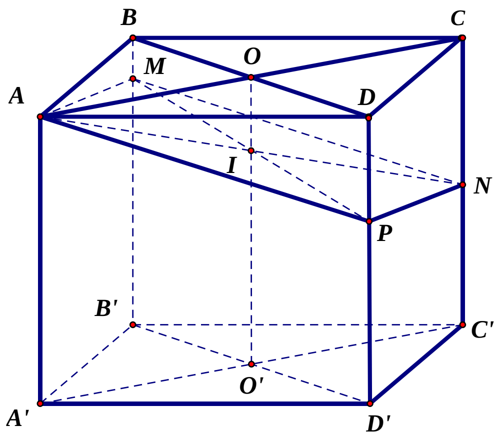
(MNP) cắt BB' tại Q. Từ giải thiết ta có $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2};\dfrac{CP}{CC'}=\dfrac{2}{3}$.

Do đó $\dfrac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{CP}{CC'}}{2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}{2}=\dfrac{7}{12}\Rightarrow V_{ABCDMNPQ}=\dfrac{7}{12}.2110=\dfrac{7385}{6}$

Vậy $V_{A'B'C'D'MNPQ}=2110-\dfrac{7385}{6}=\dfrac{5275}{6}$.

Ví dụ 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC'. Mặt phẳng (α) đi qua AN, cắt các cạnh BB',DD' lần lượt tại M,P; (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và V_2 $(V_1<V_2)$. Tính tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$.

Lời giải



Từ giải thiết ta có $\dfrac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{\dfrac{AA}{AA'}+\dfrac{CN}{CC'}}{2}=\dfrac{0+\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{4}$. Nên $\dfrac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNPA'B'C'D'}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_1}=3$.

B. CỰC TRỊ THỂ TÍCH

Ví dụ 13: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Biết tổng diện tích tất cả các mặt của khối hộp bằng 32. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối hộp đã cho.

A. $V_{\max}=\dfrac{56\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{80\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V_{\max}=\dfrac{70\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt a là độ dài cạnh của hình vuông đáy, b là chiều cao của khối hộp với $a,\ b>0$.

Theo giả thiết ta có $2a^2+4ab=32 \Leftrightarrow 2a\ \ a+2b\ \ =32 \Leftrightarrow a\ \ a+2b\ \ =16 \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{a}-a\right)$.

Do $b>0 \longrightarrow \frac{16}{a}-a>0 \rightarrow a<4$.

Khi đó thể tích của khối hộp $V=a^2.\frac{1}{2}\left(\frac{16}{a}-a\right)=-\frac{1}{2}a^3+8a$.

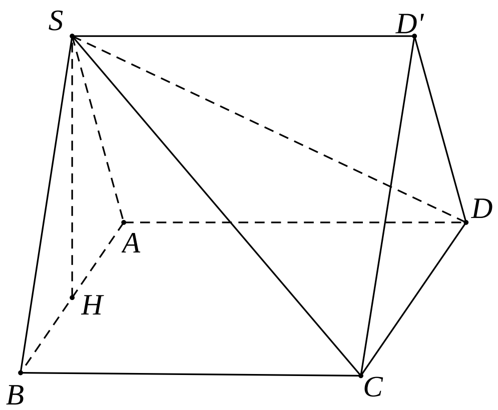
Xét hàm $f\ \ a\ \ =-\frac{1}{2}a^3+8a$ trên $\ 0;4\ $, ta được $\max\limits_{0;4} f\ \ a\ \ =f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{64\sqrt{3}}{9}$.

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC), với $\varphi<45°$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $4a^3$ **B.** $\frac{8a^3}{3}$ **C.** $\frac{4a^3}{3}$ **D.** $\frac{2a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD'//SA$ mà $SA\perp(SBC)$ (vì $SA\perp SB$, $SA\perp BC$) nên D' là hình chiếu vuông góc của D lên (SBC).

Góc giữa SD và (SBC) là $\alpha=DSD'=SDA$, do đó $SA=AD.\tan\alpha=2a.\tan\alpha$.

Đặt $\tan\alpha=x$, $x\in(0;1)$.

Gọi H là hình chiếu của S lên AB, theo đề ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}4a^2.SH$.

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất. Vì tam giác SAB vuông tại S nên

$$SH=\frac{SA.SB}{AB}=\frac{SA.\sqrt{AB^2-SA^2}}{AB}=\frac{2ax\sqrt{4a^2-4a^2x^2}}{2a}=2ax\sqrt{1-x^2}\le 2a\frac{x^2+1-x^2}{2}=a$$

Từ đó $\max SH=a$ khi $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

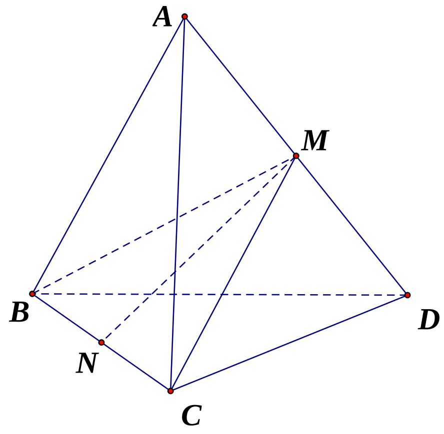
Suy ra $\max V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a.4a^2=\frac{4}{3}a^3$.

Ví dụ 15. Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AC=CD=DB=BA=2$ và AD, BC thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{32\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M , N lần lượt là trung điểm AD và BC.

Theo giả thiết ta có: ABD và ACD là các tam giác cân có M là trung điểm của AD nên $BM \perp AD$ và $CM \perp AD \Rightarrow AD \perp (BMC)$. Và có $BM = CM \Rightarrow \Delta MBC$ cân tại.

Trong tam giác ΔMBC có MN vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên

$$MN^2 = MB^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = AB^2 - \frac{AD^2}{4} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MN = \sqrt{4 - \frac{AD^2 + BC^2}{4}}.$$

Khi đó diện tích tam giác ΔMBC là: $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}MN.BC = \frac{1}{2}BC.\sqrt{4 - \frac{AD^2 + BC^2}{4}}$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AD.S_{\Delta MBC} = \frac{1}{3}.BC.AD.\sqrt{4 - \frac{AD^2 + BC^2}{4}}$.

Đặt $AD = x$, $BC = y$ ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.x.y.\sqrt{4 - \frac{x^2 + y^2}{4}}$.

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{xy}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^2 + y^2}{4} \leq -\frac{xy}{2}$.

Do đó: $V_{ABCD} \leq \frac{1}{3}.x.y.\sqrt{4 - \frac{xy}{2}} \Leftrightarrow V_{ABCD} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{(xy)^2(8 - xy)}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Ta lại có: $(xy)^2(8 - xy) = 4.\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}.(8 - xy) \leq 4.\left(\frac{\frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + 8 - xy}{3}\right)^3 = \frac{4.8^3}{27}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{xy}{2} = 8 - xy \Leftrightarrow xy = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ là: tập xác định

$$\max V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{4.8^3}{27}} = \frac{32\sqrt{3}}{27}.$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Đặt $k = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$, giá trị của k bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành; M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.MNCD$ và $S.ABCD$. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD lần lượt cắt các cạnh bên SB và SD tại N và Q. Tỷ số $\frac{V_{S.ANMQ}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm I nằm trên cạnh SC sao cho $IS = 2IC$. Mặt phẳng (P) chứa AI cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V' và V lần lượt là thể tích của khối chóp $S.AMIN$ và $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{54}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, điểm M thuộc cạnh SA, điểm N thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh SB và SC lần lượt tại Q và P. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng V, khi đó giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{2V}{5}$. **C.** $\frac{3V}{8}$. **D.** $\frac{V}{3}$.

Câu 6: Cho khối chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác SBC. Đường thẳng d đi qua G, cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.AMN$ và $S.ABC$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{17}{18}$. **B.** $\frac{21}{22}$. **C.** $\frac{37}{33}$. **D.** $\frac{10}{9}$.

Câu 7: Cho chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và SG cắt $(A'B'C')$ tại G'. Khi đó $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'}$ bằng

A. $\frac{3SG}{SG'}$. **B.** $\frac{SG'}{SG}$. **C.** $\frac{2SG}{SG'}$. **D.** $\frac{3SG'}{SG}$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB'. Mặt phẳng (CMN) chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Đặt V_1 là thể tích của khối chóp $C'.MNB'A'$ và V_2 là thể tích của khối đa diện $ABC.MNC'$. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh AA',BB',CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2},\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

A. $\frac{2}{3}V$. **B.** $\frac{9}{16}V$. **C.** $\frac{20}{27}V$. **D.** $\frac{11}{18}V$.

Câu 10: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm của AA'. Mặt phẳng $(IB'C)$ chia khối lăng trụ thành hai phần: phần chứa đỉnh A,B có thể tích bằng V_1 và phần còn lại có thể tích bằng V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA',BB',CC' lần lượt lấy ba điểm M,N,P sao cho $\frac{A'M}{AA'}=\frac{1}{3};\frac{B'M}{BB'}=\frac{2}{3};\frac{C'P}{CC'}=\frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA',BB',CC' lần lượt lấy ba điểm X,Y,Z sao cho $AX=2A'X$, $BY=B'Y$, $CZ=3C'Z$. Mặt phẳng (XYZ) cắt cạnh DD' tại điểm T. Tỉ số thể tích của khối $XYZT.ABCD$ và khối $XYZT.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{7}{24}$. **B.** $\frac{7}{17}$. **C.** $\frac{17}{7}$. **D.** $\frac{17}{24}$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA',BB',CC' và DD' lần lượt tại M,N,P,Q. Biết $AM=\frac{1}{3}a, CP=\frac{2}{5}a$. Thể tích của khối đa diện $ABCD.MNPQ$ bằng

A. $\frac{11}{30}a^3$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{11}{15}a^3$

Câu 14: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB',CC',DD' lần lượt tại M,N,P sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{CN}{CC'}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi B',D' lần lượt là trung điểm SB,SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Đặt $k=\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$, giá trị của k bằng.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M,N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.MNCD$ và $S.ABCD$. Ttỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD lần lượt cắt các cạnh bên SB và SD tại N và Q. Tỷ số $\frac{V_{S.ANMQ}}{V_{S.ABCD}}$ bằng.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

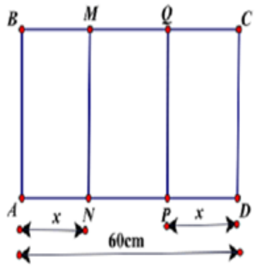
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm I nằm trên cạnh SC sao cho $IS=2IC$. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AI cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V' và V lần lượt là thể tích của khối chóp $S.AMIN$ và $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V'}{V}$ bằng.

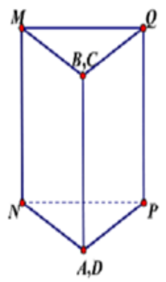
A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{54}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh AA',BB',CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2},\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng.

A. $\frac{2}{3}V$. **B.** $\frac{9}{16}V$. **C.** $\frac{20}{27}V$. **D.** $\frac{11}{18}V$.

Câu 20: Cho môt tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có AD = 60cm. Người ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x (cm) sao cho thể tích khối lăng trụ là lớn nhất.





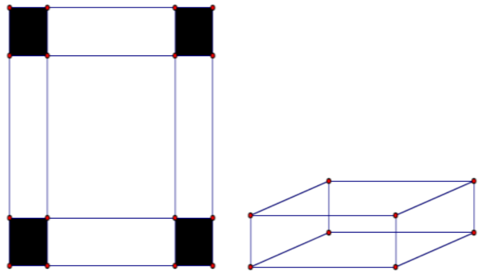
A. $x=20\ (\text{cm})$. **B.** $x=10\ (\text{cm})$.

C. $x=15\ (\text{cm})$. **D.** $x=25\ (\text{cm})$.

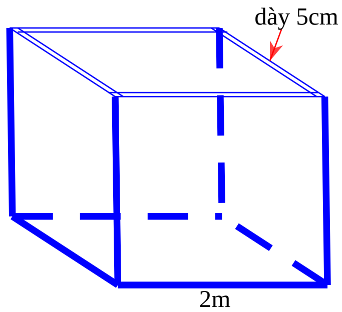
Câu 21: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $2a$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tính thể tích V lớn nhất của khối hộp.

A. $V=\dfrac{4a^3}{9}$.　　**B.** $V=\dfrac{16a^3}{27}$.

C. $V=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{27}$.　　**D.** $V=\dfrac{8a^3}{27}$.



Câu 22: Người ta xây một cái bể đựng nước không có nắp là một hình lập phương với cạnh đo phía ngoài bằng 2m. Bề dày của đáy bằng bề dày các mặt bên bằng 5cm (*hình vẽ*). Hỏi bể chứa được tối đa bao nhiêu lít nước?



A. 8000 lít.　　**B.** 7220lít.

C. 6859lít.　　**D.** 7039,5lít.

Câu 23: Cho khối hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh bằng *x* và có thể tích *V*. Tính *x* để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất.

A. $x=\sqrt[3]{4V}$.　　**B.** $x=\sqrt[3]{V}$.　　**C.** $x=\sqrt[3]{2V}$.　　**D.** $x=\sqrt[3]{6V}$.

Câu 24: **(Câu 27 - Đề 101 – 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá là $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,7.a$ (đồng).　　**B.** $97,03.a$ (đồng).　　**C.** $90,7.a$ (đồng).　　**D.** $9,07.a$ (đồng).

Câu 25: **(Câu 31 - Đề 101 – 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^3$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\text{m}^3$.　　**B.** $1,61\text{m}^3$.　　**C.** $1,33\text{m}^3$.　　**D.** $1,50\text{m}^3$.